Global Journal of Pure and Applied Mathematics
Proceedings of the 13th Symposium of the Tunisian Mathematical Society
Held in Sousse, Tunisia - March 2005
ISSN 0973-1768 Vol.1 No.3 (2005), pp. 235-250

http://www.ripublication.com/gjpam.htm

Quelques Aspects D'un Processus Généralisant le Mouvement Brownien Dans la Théorie de Dunkl

Léonard Gallardo
Université de Tours, Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique-UMR 6083, Parc de Grandmont, 37200 TOURS, FRANCE
E-mail: gallardo@univ-tours.fr

Abstract

L'opérateur $L_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} T_i^2$, où les T_i sont les opérateurs de Dunkl sur $\mathbb{R}^d$ correspondant à un système de racines et à une fonction de multiplicité k, est le générateur infinitésimal d'un processus de Markov sur $\mathbb{R}^d$ dont nous décrirons un certain nombre de ses propriétés probabilistes: semi-groupe, propriété de martingale, propriété de "scaling", propriété d'inversion du temps, partie W-radiale (où W désigne le groupe de Weyl associé au système de racines) et ses liens avec le mouvement brownien dans une chambre de Weyl, et enfin décomposition en «skew-product».

AMS Subject Classification: 60G17, 60G44, 60J25, 60J60, 60J65, 60J75, 60J99, 60H05.
Keywords: Processus de Markov homogène, Processus de Markov avec sauts, Processus de Dunkl, Processus de Dunkl radial, Processus de Dunkl avec drift, Processus de Bessel, Propriété d'inversion du temps, Mouvement brownien dans une chambre de Weyl. Décomposition en chaos de Wiener, Décomposition en «skew-product»

1. Introduction

La théorie de Dunkl initiée par Charles F. Dunkl à la fin des années 80, trouve son origine dans l'étude des polynômes orthogonaux (à d-variables) relatifs à une fonction poids invariante par un sous groupe fini W du groupe orthogonal $O(d)$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$. Le cas où W est un groupe de Coxeter-Weyl associé à un système de racines R de $\mathbb{R}^d$ est particulièrement intéressant pour diverses raisons qui trouvent leur justification dans les multiples applications qui en découlent en Physique théorique ([5]), Théorie des algèbres de Lie semi-simples, Théorie des opérateurs, Analyse de Fourier et récemment en Probabilités. L'outil fondamental introduit par Dunkl, consiste en une famille T_i ($1 \leq i \leq d$) d'opérateurs différentiels et aux différences qui généralisent les dérivées partielles usuelles $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ et dont la propriété fondamentale est d'engendrer une algèbre *commutative* d'opérateurs sur $C^2(\mathbb{R}^d)$ (l'espace des fonctions de classe C^2 définies sur $\mathbb{R}^d$). On peut en trouver la justification dans le livre de Dunkl et Xu ([8]):

Les opérateurs différentiels W-invariants ne commutent pas avec l'action de W sur les polynômes (à moins de ne considérer que des polynômes W-invariants). Ainsi pour pouvoir travailler avec des polynômes arbitraires, on doit considérer une nouvelle classe d'opérateurs. L'idée la plus simple est de considérer les opérateurs aux différences

$$p \to \frac{p(x) - p(\sigma_\alpha(x))}{< \alpha, x >},$$

pour les α du système de racines, où σ_α est la symétrie orthogonale (aussi appelée réflexion) par rapport à l'hyperplan H_α orthogonal à α et $< .,. >$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^d$. Ces opérateurs conservent les polynômes. En les «mélangeant» alors de manière appropriée aux dérivées partielles $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ suivant la formule (2.1) donnée ci-dessous dans le paragraphe 1, on obtient la nouvelle classe d'opérateurs en question.

En 1998 M. Rösler ([19] a montré que l'opérateur $L_k = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{d} T_i^2$ dont la forme généralise celle du laplacien usuel dans la théorie de Dunkl, est le générateur infinitésimal d'un semigroupe de Markov sur $\mathbb{R}^d$. Les premières propriétés du processus associé à ce semigroupe ont ensuite été établies par Rösler et Voit ([21]). Le but de notre exposé est de faire le point sur les divers aspects probabilistes de ce processus (que nous appelons le processus de Dunkl) qui ont été étudiés depuis par différents auteurs.

2. Généralités sur la théorie de Dunkl

On suppose donné un système R de *racines* dans $\mathbb{R}^d$, c'est à dire un ensemble fini $R \subset \mathbb{R}^d$ tel que

$$\forall \alpha \in R, R \cap \mathbb{R}\alpha = \{-\alpha, +\alpha\},$$

et

$$\forall \alpha \in R, \sigma_\alpha(R) = R,$$

où

$$\sigma_\alpha(x) = x - 2\frac{< \alpha, x >}{|\alpha|^2}\alpha \quad (x \in \mathbb{R}^d),$$

est la symétrie orthogonale relative à l'hyperplan H_α orthogonal au vecteur α. Dans toute la suite de l'exposé nous supposerons par convention que les racines $\alpha \in R$ sont telles que $|\alpha|^2 = 2$. Ainsi la symétrie σ_α prend la forme simple

$$\sigma_\alpha(x) = x - < \alpha, x > \alpha \quad (x \in \mathbb{R}^d). \tag{2.1}$$

On fixe alors un sous système positif R_+ représentant la moitié des racines et défini par

$$R_+ = \{\alpha \in R; < \alpha, \beta > \in \mathbb{R}_+\},$$

où β est un vecteur qui n'appartient pas aux hyperplans H_α. On suppose également donnée une fonction positive $k : R \to \mathbb{R}_+$ invariante par le groupe de Coxeter-Weyl W engendré par les symétries σ_α, $\alpha \in R$ et appelée *fonction de multiplicité* associée au système de racines (la terminologie provient de la théorie des espaces homogènes des groupes de Lie compacts). On notera que cette fonction est forcément constante si le groupe W agit de manière irréductible sur R. Plus généralement la fonction k est constante sur chaque W-orbite de points de R. Pour les propriétés générales des systèmes de racines et des groupes de Coxeter-Weyl, le lecteur peut consulter le livre de J.E. Humphreys ([15]) ou le résumé des faits essentiels qui est donné dans le chapitre 4 du livre de Dunkl et Xu ([8]). Les opérateurs de Dunkl associés au système de racines R et à la fonction de multiplicité k sont alors les opérateurs différentiels et aux différences T_i, $1 \le i \le d$, définis par

$$T_i u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha)\alpha_i \frac{u(x) - u(\sigma_\alpha x)}{< \alpha, x >} \quad (u \in C^2(\mathbb{R}^d)) \tag{2.2}$$

Les T_i, $1 \le i \le d$, engendrent une algèbre commutative d'opérateurs sur $C^2(\mathbb{R}^d)$ (voir [6]).

L'opérateur d'entrelacement V_k est l'un des ingrédients essentiels de la théorie. C'est l'unique isomorphisme de l'espace $\mathcal{P} = \mathbb{C}[\mathbb{R}^d]$ des polynômes sur lui même qui pour tout $n \in \mathbb{N}$ conserve l'espace $\mathcal{P}_n$ des polynômes homogènes de degré n et qui est tel que

$$\forall i = 1, \ldots, d, \quad T_i V_k = V_k \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.3}$$

K. Trimèche a montré que V_k se prolonge en un isomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ sur lui même ([22]). La principale difficulté est que, sauf pour quelques exemples de systèmes de racines, on ne connait pas d'expression explicite de V_k. On sait seulement que c'est un opérateur positif et que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une mesure de probabilité μ_x sur $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\forall f \in C_c(\mathbb{R}^d), \quad V_k f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) d\mu_x(y),$$

où $C_c(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions continues à support compact (voir [20]).

Un autre ingrédient fondamental est le noyau de Dunkl D_k. C'est le transformé par V_k du noyau exponentiel classique. Il est strictement positif sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et il est donné par

$$D_k(x, y) = V_k(e^{<.,y>})(x). \tag{2.4}$$

Il admet un prolongement analytique à $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d$ qui s'écrit

$$D_k(x, y) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^d} \frac{m_\nu(x)}{\nu!} y^\nu, \tag{2.5}$$

où $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d)$ est un multi-indice, $\nu! = \nu_1! \ldots, \nu_d!$, $y^\nu = y_1^{\nu_1} \ldots y_d^{\nu_d}$ et où $m_\nu(x) = V_k(t^\nu)(x)$ est la ν-ième fonction moment de la théorie de Dunkl.

Enfin l'instrument analytique essentiel de la théorie est la transformation de Fourier-Dunkl $\mathcal{F}_k$ définie pour des fonctions $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ convenables par

$$\mathcal{F}_k f(\xi) = \frac{1}{c_k} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) D_k(-i\xi, x) \omega(x) dx, \tag{2.6}$$

où

$$\omega_k(x) = \Pi_{\alpha \in R_+} | < \alpha, x > |^{2k(\alpha)} \quad (x \in \mathbb{R}^d), \tag{2.7}$$

est la «fonction poids» de Dunkl qui est une fonction homogène de degré

$$2\gamma = 2 \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha) \tag{2.8}$$

et

$$c_k = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} \omega_k(x) dx \tag{2.9}$$

est une constante liée à k et au système de racines R et appelée parfois constante de Mehta. Pour les propriétés de la transformation de Fourier-Dunkl, on pourra consulter le survey de M. Rösler ([20] et les références qui s'y trouvent car nous n'en aurons pas besoin dans la suite de cet exposé.

3. Le semigroupe de Dunkl

On définit le laplacien de Dunkl comme étant l'opérateur $L_k = \sum_{i=1}^{d} T_i^2$, où les T_i sont les opérateurs de Dunkl. Son expression explicite est donnée par

$$L_k u(x) = \triangle u(x) + 2 \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha) \left[\frac{< \nabla u(x), \alpha >}{< \alpha, x >} + \frac{u(\sigma_\alpha x) - u(x)}{< \alpha, x >^2} \right] \quad (u \in C^2(\mathbb{R}^d)), \tag{3.1}$$

où $\Delta = \sum_{i=1}^{d} \partial_i^2$ est le laplacien usuel. Pour éviter le cas où $L_k = \Delta$, nous supposerons dans toute la suite que la fonction k n'est pas identiquement nulle. On déduit immédiatement de (2.3) que l'opérateur L_k vérifie la relation d'entrelacement

$$L_k V_k = V_k \Delta. \tag{3.2}$$

Par exemple si d=1, on a $W = \mathbb{Z}_2 = \{Id, -Id\}$ et k un nombre strictement positif. L'opérateur d'entrelacement est donné par

$$V_k u(x) = a_k \int_{-1}^{1} u(xt)(1-t)^{k-1}(1+t)^k dt \quad \left(a_k = \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(k)}\right) \tag{3.3}$$

et le laplacien de Dunkl est de la forme

$$L_k u(x) = u''(x) + 2k\left[\frac{1}{x}u'(x) - \frac{u(x)-u(-x)}{2x^2}\right]. \tag{3.4}$$

Soit $C_0(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ qui tendent vers 0 quand $n \to \infty$. Dans [19] et [21], on trouve le résultat suivant:

Theorem 3.1: Il existe un semigroupe $(P_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs de Markov-Feller sur $C_0(\mathbb{R}^d)$ de générateur infinitésimal $\frac{1}{2}L_k$. Ce semigroupe a des densités de transition (par rapport à la mesure de Lebesgue) données pour $t > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$ par

$$p_t^{(k)}(x,y) = \frac{1}{c_k t^{\gamma+d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2+|y|^2}{2t}\right) D_k\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, \frac{y}{\sqrt{t}}\right)\omega_k(y), \tag{3.5}$$

où D_k et ω_k sont respectivement le noyau et la fonction poids de Dunkl (voir (2.5) et (2.7))et γ est la constante donnée en (2.8).

Considérons alors $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov-Feller sur $\mathbb{R}^d$ de semigroupe $(P_t)_{t\geq 0}$ que nous appelerons *processus de Dunkl*. On peut déjà remarquer que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ n'est pas une diffusion car son générateur comporte une partie aux différences. En conséquence, ce processus n'est pas à trajectoires continues contrairement au mouvement brownien de $\mathbb{R}^d$ dont le générateur est le laplacien Δ. Toutefois comme X est un processus de Feller, ses trajectoires sont càdlàg (i.e. continues à droite et avec des limites à gauche).

Propriétés immédiates du processus de Dunkl

Voyons déjà quelques propriétés qui résultent de la forme du générateur de X (voir [11] et [12]):

1) $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale car l'opérateur L_k «tue» les fonctions affines (i.e. $L_k u \equiv 0$ si $u(x) = \langle \beta, x\rangle$).

2) Le module euclidien $|X| = (|X_t|)_{t\geq 0}$ du processus de Dunkl X, est un processus de Bessel sur $\mathbb{R}_+$ de dimension $N = 2\gamma + d$ (ou d'indice $\alpha = \gamma + (d/2) - 1$) où γ est définie en (2.8). C'est à dire que $|X|$ a pour générateur infinitésimal l'opérateur différentiel

$$G^\alpha f(x) = \frac{1}{2}\left(f''(x) + \frac{2\alpha + 1}{x} f'(x)\right) \tag{3.6}$$

On déduit immédiatement de ce résultat et du 1) que le processus de Dunkl X est une martingale.

3) Si $u(x) = |x|^2$, un calcul trivial montre que $L_k u(x) \equiv N$ $(= 2\gamma + d)$. Ceci implique aussitôt que le processus $\left\{|X_t|^2 - Nt; t \geq 0\right\}$ est une martingale.

4) L'expression des probabilités de transition (3.5) montrent facilement que le processus de Dunkl X possède *la propriété de changement d'échelle* (dite propriété de «scaling») du mouvement brownien, c'est à dire que pour tout $c > 0$, les processus $\{(X_{ct}, t \geq 0); \mathbb{P}_x\}$ et $\{(\sqrt{c}X_t, t \geq 0); \mathbb{P}_{x/\sqrt{c}}\}$ sont identiques en loi[1].

Processus de Dunkl irréductibles

La structure du processus de Dunkl dépend de la géomètrie du système de racines R et donc du groupe de Coxeter-Weyl W de la manière que nous décrivons maintenant en présentant l'un des résultats obtenus par L. Godefroy ([14], voir aussi [10]):

Il existe une décomposition de $\mathbb{R}^d$ en somme directe orthogonale

$$\mathbb{R}^d = V_0 \overset{\perp}{\oplus} V_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_l, \tag{3.7}$$

où $V_0 = \cap_{\alpha\in R} H_\alpha$ est l'intersection (éventuellement réduite à $\{0\}$) des hyperplans H_α et les V_j, $(1 \leq j \leq d)$ sont des sous espaces de $\mathbb{R}^d$ W-irréductibles. De plus

1) $R_j = R \cap V_j$, $(1 \leq j \leq d)$ est un système de racines dans V_j et $V_j = V[R_j]$ est l'espace vectoriel engendré par R_j.

2) Si W_j désigne le groupe de Coxeter-Weyl de V_j associé au système de racines R_j, alors $W = \prod_{j=1}^{l} W_j$ est le produit direct des groupes W_j.

3) Le noyau de Dunkl D_k (voir (2.4) et (2.5)) s'écrit sous la forme d'un produit tensoriel $D_k = \otimes_{i=0}^{l} D_k^{(i)}$ des noyaux de Dunkl correspondants aux sous espaces V_i. Plus précisément, on a

$$D_k(x, y) = \prod_{i=0}^{l} D_k^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)}), \tag{3.8}$$

[1] $\mathbb{P}_x$ désigne la probabilité sur l'espace Ω des trajectoires, pour le processus X partant du point $x \in \mathbb{R}^d$.

où pour $x \in \mathbb{R}^d$, $x^{(i)}$ désigne la projection orthogonale de x sur le sous espace V_i $(i = 0, \ldots, l)$ et où $D_k^{(0)}(x^{(0)}, y^{(0)}) = e^{<x^{(0)}, y^{(0)}>}$ est le noyau exponentiel classique sur V_0 (si V_0 n'est pas réduit à $\{0\}$ et $D_k^{(0)}(0, 0) = 1$ sinon) et pour $i = 1, \ldots, l$, $D_k^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)})$ est le noyau de Dunkl de l'espace vectoriel V_i associé au système de racines R_i et à la restriction $k_{|R_i}$ de la fonction de multiplicité k à R_i.

Le semigroupe de Dunkl $(P_t)_{t\geq 0}$ est alors le produit tensoriel $P_t = \otimes_{i=0}^{l} P_t^{(i)}$ où $(P_t^{(i)})_{t\geq 0}$ est le semigroupe de Dunkl correspondant à $(V_i, R_i, k_{|R_i})$. Autrement dit, de manière probabiliste, ceci signifie que la projection orthogonale $X_t^{(i)}$ du processus de Dunkl X_t sur V_i, est un processus de Dunkl sur V_i, on a

$$X_t = \sum_{i=0}^{l} X_t^{(i)},$$

et les processus $(X_t^{(i)})_{t\geq 0}$ $(i = 0, \ldots, l)$ (appelés composantes irréductibles du processus de Dunkl X) sont indépendants[2].

4. La partie W-radiale du processus de Dunkl

Fixons une chambre de Weyl C du système de racines R (i.e. C:= une composante connexe de $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{\alpha\in R} H_\alpha$). L'opérateur différentiel $\frac{1}{2}L_k^W$ où

$$L_k^W u(x) = \Delta u(x) + 2 \sum_{\alpha\in R_+} k(\alpha) \frac{< \nabla u(x), \alpha >}{< \alpha, x >}, \tag{4.1}$$

(avec $u \in C_0^2(\overline{C})$, l'espace des fonctions continues sur $\overline{C}$, de classe C^2 dans C et nulles sur les murs de C et $< \nabla u(x), \alpha >= 0$ pour $x \in H_\alpha, \alpha \in R_+$), est le générateur infinitésimal d'un processus de diffusion $X^W = (X_t^W)_{t\geq 0}$ dans $\overline{C}$ (voir [21]) qu'on appelle partie W-radiale du processus de Dunkl X. En effet l'espace $\mathbb{R}^d/W$ des W-orbites dans $\mathbb{R}^d$ s'identifie à $\overline{C}$ et on a

$$X_t^W = \pi(X_t)$$

si $\pi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d/W$ désigne la projection canonique. Par exemple en dimension un, $\overline{C} = \mathbb{R}_+$ et $\pi(X_t) = |X_t|$ est un processus de Bessel ([11]).

On déduit immédiatement de (3.5) que les densités de probabilité du processus X^W sont de la forme (voir [12])

$$p_t^W(x, y) = \frac{1}{c_k t^{\gamma+d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2 + |y|^2}{2t}\right) D_k^W\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, \frac{y}{\sqrt{t}}\right) \omega_k(y), \tag{4.2}$$

[2] On notera que $(X_t^{(0)})_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien classique si $V_0 \neq \{0\}$.

où

$$D_k^W(u,v) = \sum_{w\in W} D_k(u,wv). \tag{4.3}$$

Example 4.1: Il est intéressant de noter que le mouvement brownien dans une chambre de Weyl étudié par Biane, Bougerol and O'Connell dans [1], est la partie W-radiale d'un processus de Dunkl. En effet, son générateur infinitésimal est de la forme $\frac{1}{2}L_k^W$ avec la fonction de multiplicité $k(\alpha) \equiv 1$. On peut le voir (suivant [12]) en considérant la fonction

$$h(x) = \prod_{\alpha\in R_+} <\alpha, x>,$$

qui est Δ-harmonic (voir par exemple [8], Theorem 4.2.6) et strictement positive dans la chambre de Weyl C (si elle est bien choisie). Alors la formule (4.1) avec $k \equiv 1$, peut s'écrire

$$L_k^W u(x) = \Delta u(x) + \frac{2}{h(x)} < \nabla u(x), \nabla h(x) > .$$

Ceci montre immédiatement (d'après [18], p.357) que le processus correspondant X^W est le transformé de Doob[3] associé à la fonction harmonique h, du mouvement brownien dans C, tué quand il atteint les murs de C i.e. le mouvement brownien dans la chambre de Weyl C de [1].

5. Les sauts du processus de Dunkl et la décomposition chaotique

Les résultats de cette partie sont extraits de [13]. Commençons par rappeler que le noyau de Lévy $N(x,dy)$ d'un semigroupe d'opérateurs markoviens $(P_t)_{t\geq 0}$ est déterminé pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par la formule

$$\lim_{t\to 0} \frac{P_t f(x)}{t} = \int_{\mathbb{R}^d} N(x,dy) f(y),$$

où f est une fonction dans le domaine du générateur infinitésimal qui s'annule dans un voisinage du point x ([16]). Pour le processus de Dunkl X et avec les notations introduites précédemment, le noyau de Lévy a la forme suivante

$$N(x,dy) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\alpha\in R_+} k(\alpha) \frac{\delta_{\sigma_\alpha(x)}(dy)}{<\alpha, x>^2} & \text{if} \quad x \notin \bigcup_{\alpha\in R_+} H_\alpha \\ \displaystyle\sum_{\substack{\alpha\in R_+ \\ \alpha\notin S}} k(\alpha) \frac{\delta_{\sigma_\alpha(x)}(dy)}{<\alpha, x>^2} & \text{if} \quad x \in \bigcap_{\alpha\in S} H_\alpha \\ 0 & \text{if} \quad x = 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

[3] appelé h-transform en anglais

où S désigne un sous ensemble quelconque du système R_+ et $\delta_z(dy)$ est la mesure de Dirac au point $z \in \mathbb{R}^d$.

Considérons maintenant la fonction $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x, y) = \mathbf{1}_{(suppN(x,dz))^c}(y), \tag{5.2}$$

i.e. prenant la valeur 1 si y n'est pas dans l'ensemble $\{\sigma_\alpha(x), \alpha \in R_+\}$ et la valeur 0 sinon. On a le résultat suivant qui montre en particulier comment le noyau de Lévy gouverne les sauts du processus X.

Proposition 5.1: Pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\sum_{s \le t} f(X_{s-}, X_s)\mathbf{1}_{(X_s \ne X_{s-})} = 0, \quad \mathbb{P}_x \quad \text{p.s..} \tag{5.3}$$

Ce résultat signifie que quand le processus saute à un instant s (i.e. quand $X_s \neq X_{s^-}$), il existe un $\alpha \in R_+$ tel que $X_s = \sigma_\alpha(X_{s^-})$. Autrement dit le processus saute du point X_{s^-} au point symétrique[4] par rapport à l'hyperplan H_α.

Pour obtenir ce résultat on compense[5] la fonctionnelle additive de type discontinu et positive du premier membre de (5.3) par le processus

$$\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} N(X_{s-}, dy) f(X_{s-}, y), \tag{5.4}$$

qui est identiquement nul d'après la définition (5.2) de f. Comme les processus (5.3) et (5.4) ont même espérance, le résultat de la Proposition en découle.

Conséquence 5.2: L'amplitude d'un saut du processus dans la direction $\alpha \in R_+$ est, d'après (2.1), égale à

$$\Delta X_s := X_s - X_{s-} = \sigma_\alpha(X_{s-}) - X_{s-} = - < \alpha, X_{s-} > \alpha. \tag{5.5}$$

Evidemment d'après la forme du noyau de Lévy et la discussion précédente, si $k(\alpha) = 0$ pour un $\alpha \in R_+$, alors il ne peut pas y avoir de saut dans la direction α.

Le résultat qui suit montre que dans un intervalle de temps donné, la somme des amplitudes des sauts est finie:

Proposition 5.3: Pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

$$\sum_{s \le t} |\Delta X_s| < +\infty \quad \mathbb{P}_x \quad \text{p.s..} \tag{5.6}$$

[4] l'instant de saut s est bien entendu aléatoire et il en est de même pour la direction α suivant laquelle le processus saute.

[5] Pour la théorie de la compensation des fonctionnelles additives voir voir P.A. Meyer [16], p.154 ou [23]. Précisons d'ailleurs pour les non spécialistes que la principale utilité du noyau de Lévy d'un processus est justement de compenser des fonctionnelles dépendant des sauts.

Donnons une idée de la manière dont on obtient ce résultat technique très important: On peut écrire

$$\sum_{s\leq t} |\Delta X_s| = \sum_{\alpha\in R_+}\sum_{s\leq t} f_\alpha(X_{s-}, X_s), \tag{5.7}$$

avec

$$f_\alpha(x,y) = \sqrt{2}| < \alpha, x > |\mathbf{1}_{(y=\sigma_\alpha(x)\neq x)}.$$

Mais la fonctionnelle positive discontinue $\sum_{s\leq t} f_\alpha(X_{s-}, X_s)$ peut être compensée [6] par le processus:

$$\begin{aligned}\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} N(X_{s-}, dy) f_\alpha(X_{s-}, y) = &\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\beta\in R_+} k(\beta) \frac{\delta_{\sigma_\beta X_{s-}}(dy)}{< \beta, X_{s-} >^2} f_\alpha(X_{s-}, y)\\ = &\sqrt{2}k(\alpha)\int_0^t \frac{ds}{| < \alpha, X_{s-} > |}.\end{aligned}$$

Pour obtenir le résultat de la proposition, il suffit de montrer que le processus du membre de droite de (5.7) a une espérance finie. Grâce à la théorie de la compensation et à ce qui précède, ceci résulte du lemme suivant:

Lemme 5.4: Pour tout $\alpha \in R_+$ tel que $k(\alpha) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $t > 0$, on a:

$$E_x\left(\int_0^t \frac{ds}{| < \alpha, X_{s-} > |}\right) < +\infty. \tag{5.8}$$

La preuve de ce lemme est assez technique. Elle utilise l'expression (3.5) du semi-groupe, les propriétés analytiques du noyau de Dunkl et des méthodes taubériennes. On trouvera tous les détails dans [13].

Applications de l'étude des sauts: Il résulte de ce qui précède que le processus

$$C_t^\alpha = -k(\alpha)\left(\int_0^t \frac{ds}{< \alpha, X_{s-} >}\right).\alpha,$$

est le compensateur de la somme des sauts de X_t dans la direction α. Donc $C_t = \sum_{\alpha\in R_+} C_t^\alpha$ est le compensateur de la somme totale des sauts $\sum_{s\leq t} \Delta X_s$ du processus dans l'intervalle de temps $[0, t]$. Par la théorie de la compensation, le processus

$$X_t^d = \sum_{s\leq t} \Delta X_s - C_t,$$

[6] Relativement aux quantités qui apparaissent via la compensation, on continue à écrire X_{s-}, bien que X_s serait également correct puisque l'ensemble $\{s : X_s \neq X_{s-}\}$ est Lebesgue négligeable.

est une martingale et comme le processus C_t est continu, le processus

$$X_t^c = X_t - \sum_{s \le t} \Delta X_s + C_t$$

est une martingale continue. En fait $X_t = X_t^c + X_t^d$ est la décomposition de la martingale X_t en partie martingale continue X_t^c et martingale purement discontinue X_t^d. De plus sous la probabilité $\mathbb{P}_x$, on a montré que

$$X_t^c = x + B_t,$$

où $B = (B_t)_{t \ge 0}$ est un mouvement brownien de $\mathbb{R}^d$. L'énoncé précis que nous avons obtenu est le suivant (voir [13]):

Theorem 5.5: Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, sous $\mathbb{P}_x$, on peut écrire la décomposition de la martingale (X_t) en partie martingale continue et martingale purement discontinue sous la forme suivante:

$$X_t = x + B_t + \sum_{\alpha \in R_+} \sqrt{k(\alpha)} M_t^\alpha \alpha, \tag{5.9}$$

où $(B_t, t \ge 0)$ est un mouvement brownien d-dimensionel et $(M_t^\alpha, t \ge 0)_{\alpha \in R_+}$ est une famille de martingales normales au sens de P.A. Meyer [17]:

$$\left\langle M^\alpha, M^\alpha \right\rangle_t = t \tag{5.10}$$

et :

$$\left[M^\alpha, M^\beta{}_t\right] = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \neq \beta, \tag{5.11}$$

où $\langle ., . \rangle$ (resp. $[., .]$) désigne le crochet oblique (resp. le crochet droit) des martingales. De plus, $(M_t^\alpha, t \ge 0)$ a des trajectoires à variation finie, et peut s'écrire comme la somme compensée de ses sauts:

$$M_t^\alpha = \sum_{s \le t} \frac{- < \alpha, X_{s-} >}{\sqrt{k(\alpha)}} \mathbf{1}_{\{X_s = \sigma_\alpha(X_{s-}) \neq X_{s-}\}} + \int_0^t \frac{\sqrt{k(\alpha)} ds}{< \alpha, X_{s-} >} \tag{5.12}$$

Ce résultat nous a permis d'établir que le processus de Dunkl possède la propriété de décomposition en chaos de Wiener que nous allons brièvement présenter en renvoyant toujours à l'article de Gallardo et Yor [13] pour les détails et aux livres [3], [4] et [24] pour les prérequis et des exemples de processus satisfaisant la propriété de décomposition en chaos de Wiener.

Considérons l'entier $N = d + card(R_+)$. Pour décrire le n-ième chaos de Wiener nous définissons une numérotation des racines $\alpha \in R_+$ de la forme $\alpha_{d+1}, \ldots, \alpha_N$ et pour tout entier $\epsilon \in 1, N$, on note $Z^\epsilon = (Z_t^\epsilon)_{t \ge 0}$, la martingale réelle:

$$Z_t^\epsilon = \begin{cases} B_t^{(\epsilon)} & \text{si} \quad \epsilon \in 1, d \\ M_t^{\alpha_\epsilon} & \text{si} \quad \epsilon \in d+1, N \end{cases} \tag{5.13}$$

Si $\mathcal{F}_\infty$ désigne la tribu terminale du processus de Dunkl X, le n-ième chaos de Wiener $\mathcal{C}_n(X)$ $(n \geq 1)$ est alors défini comme le sous espace de l'espace $L^2(\mathcal{F}_\infty)$ du processus, engendré par les intégrales stochastiques «mixtes»

$$\int_0^\infty dZ_{u_1}^{\epsilon_1} \int_0^{(u_1)-} dZ_{u_2}^{\epsilon_2} \dots \int_0^{(u_{n-1})-} dZ_{u_n}^{\epsilon_n} f_n(u_1, ..., u_n), \tag{5.14}$$

pour $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in 1, N^n$ et $f_n : \Delta_n \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que:

$$\int_{\Delta_n} du_1 ... du_n f_n^2(u_1, ..., u_n) < \infty,$$

où

$$\Delta_n = \{(u_1, \dots, u_n); 0 \ < u_n \ < u_{n-1} \dots \ < u_1\}.$$

Si $n = 0$, $\mathcal{C}_0(X)$ est le sous espace des constantes. Avec ces notations, on peut énoncer la propriété de décomposition en chaos de Wiener du processus de Dunkl sous la forme suivante:

Theorem 5.6: $L^2(\mathcal{F}_\infty) = \overset{\infty}{\underset{n=0}{\oplus}} \mathcal{C}_n(X).$

6. La propriété d'inversion du temps et le processus de Dunkl avec drift

On dit qu'un processus de Markov $\{(X_t, t \geq 0); (\mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{R}^d}\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ possède la *propriété d'inversion du temps* si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ le processus:

$$(tX_{1/t}, t > 0),$$

est un processus de Markov homogène sous la probabilité $\mathbb{P}_x$. Par exemple le mouvement brownien (B_t) de $\mathbb{R}^d$ possède la propriété d'inversion du temps car sous $\mathbb{P}_x$, le processus $(tB_{1/t}, t > 0)$ est un mouvement brownien avec drift égal à x. Autrement dit c'est le processus de Markov homogène de générateur infinitésimal

$$\mathcal{L}^{(x)} f(y) = \frac{1}{2} \Delta f(y) + < x, \nabla f(y) > \tag{6.1}$$

Pour le processus de Dunkl, on a montré le résultat suivant (voir [12]):

Theorem 6.1: Le processus de Dunkl $X = (X_t)_{t \geq 0}$ possède la propriété d'inversion du temps. De plus sous $\mathbb{P}_x$, le processus de Markov $(tX_{1/t}, t > 0)$ a des densités de transition

$$q_t^{(x)}(a, b) = \exp\left(-\frac{1}{2}|x|^2 t\right) \frac{D_k(x, b)}{D_k(x, a)} p_t(a, b), \tag{6.2}$$

où D_k est le noyau de Dunkl (2.4) et $p_t(a, b)$ sont les densités de transition (3.5) du processus de Dunkl. De plus son générateur infinitésimal est de la forme

$$\mathcal{L}^{(k),x} : f \longmapsto \frac{1}{2}\frac{1}{D_k(x, .)}L_k(D_k(x, .)f) - \frac{|x|^2}{2}f, \tag{6.3}$$

$(f \in C^2(\mathbb{R}^d))$. Plus explicitement, on peut aussi l'écrire sous la forme

$$\mathcal{L}^{(k),x}(f)(y) = \frac{1}{2}L_k(f)(y) + \frac{1}{D_k(x, y)}\Bigg\{ < \nabla_y(D_k(x, y)), \nabla f(y) > \\ + \sum_{\alpha \in R_+} \frac{k(\alpha)}{< y, \alpha >^2}(D_k(x, \sigma_\alpha y) - D_k(x, y))(u(\sigma_\alpha y) - u(y))\Bigg\}.$$

Nous avons appelé ce processus, *le processus de Dunkl avec drift x*. On peut noter que si $k(\alpha) \equiv 0$, est le mouvement brownien avec drift x considéré en (6.1).

On a obtenu ce résultat en montrant que le mécanisme de transition du processus $(tX_{1/t}, t > 0)$ sous $\mathbb{P}_x$ est donné par l'espérance conditionnelle

$$E_x f(tX_{1/t})|sX_{1/s} = z = \int dy\ f(y)q_{s,t}^{(x)}(z, y) \tag{6.4}$$

où

$$q_{s,t}^{(x)}(a, b) = \frac{1}{t^n}\frac{p_{\frac{1}{t}}(x, \frac{b}{t})p_{\frac{1}{s}-\frac{1}{t}}(\frac{b}{t}, \frac{a}{s})}{p_{\frac{1}{s}}(x, \frac{a}{s})}. \tag{6.5}$$

Un calcul utilisant l'expression des densités de transition du processus de Dunkl permet de voir que $q_{s,t}^{(x)}(a, b)$ ne dépend que de $t - s$ et on obtient l'expression (6.2). La forme du générateur s'obtient alors de manière classique.

Remark: La partie W-radiale (X_t^W) du processus de Dunkl possède aussi la propriété d'inversion du temps (voir [12]). L'expression du générateur infinitésimal est analogue à celle de $L^{(k),x}$ donnée en (6.3) en remplaçant L_k par L_k^W et le noyau de Dunkl D_k par son noyau W-radialisé D_k^W donné en (4.3).

7. La décomposition du processus de Dunkl en skew product

Supposons $d = 1$ et considérons le processus de Dunkl $X = (X_t)_{t \geq 0}$ sur $\mathbb{R}$ (son générateur infinitésimal est donné par (3.4)). On sait que sa valeur absolue $|X|$ est un processus de Bessel sur $\mathbb{R}_+$ de dimension $2k + 1$. On peut reconstruire un processus de Dunkl de paramètre $k \geq 1/2$ à partir d'un processus de Bessel de dimension $2k + 1$ et d'un processus de Poisson indépendant de la manière suivante (voir [11]):

Theorem 7.1: Soit $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ un processus de Bessel sur $\mathbb{R}_+$ de dimension $2k+1 \geq 2$ ne partant pas de 0 et soit $\mathcal{N} = (\mathcal{N}_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda = k$ et indépendant de Y. Considérons la fonctionnelle $A_t = \int_0^t \frac{ds}{Y_s^2}$ $(t \geq 0)$. Alors le processus

$$X_t = Y_t(-1)^{\mathcal{N}_{A_t}}, \tag{7.1}$$

est un processus de Dunkl sur $\mathbb{R}$ de paramètre k.

La généralisation de ce résultat à $\mathbb{R}^d$ est un problème difficile. Il a été résolu de manière particulièrement astucieuse par O. Chybiryakov ([2]) de la manière suivante: Supposons donné un système de racines dans $\mathbb{R}^d$ et k une fonction de multiplicité telle que $k(\alpha) \geq 1/2$. Fixons un sous système positif R_+, supposons $R_+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ et pour tout $i = 1, \dots, m$, posons $R_+^i = \{\alpha_1, \dots, \alpha_i\}$. Soit alors X un processus de Dunkl correspondant à R_+ et k, fixons une chambre de Weyl C et considérons la partie W-radiale X^W de X dans C. On suppose que X part d'un point $x \in E := \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{\alpha \in R} H_\alpha)$ c'est à dire qui n'est pas situé sur les hyperplans H_α. On a alors

Theorem 7.2: 1) Pour $i = 1, \dots, m$, il existe des processus de Poisson N^i d'intensités respectives $k(\alpha_i)$ et des processus Y^i définis par récurrence par:

$$Y_t^0 = X_t^W$$

et

$$Y_{\tau_t^i}^i := \sigma_{\alpha_i}^{N_t^i}\left(Y_{\tilde{\tau}_t^i}^{i-1}\right)$$

où

$$\tau_t^i := inf\left\{s \geq 0;\, A_s^i > t\right\} \quad \text{avec} \quad A_t^i := \int_0^t \frac{ds}{< Y_s^i, \alpha_i >^2},$$

et

$$\tilde{\tau}_t^{i-1} := inf\left\{s \geq 0;\, \tilde{A}_s^{i-1} > t\right\} \quad \text{avec} \quad \tilde{A}_t^{i-1} := \int_0^t \frac{ds}{< Y_s^{i-1}, \alpha_i >^2},$$

de telle sorte que pour tout $t > 0$, $\tau_t^i < +\infty$ p.s., $A_t^i < +\infty$ p.s., $\tilde{\tau}_t^{i-1} < +\infty$ p.s., $\tilde{A}_t^{i-1} < +\infty$ p.s., et le processus Y^m est égal à X en loi, i.e. Y^m est un processus de Dunkl correspondant à R_+ et k.
2) Pour tout $i = 0, \dots, m$, Y^i est un processus de Markov de générateur

$$\mathcal{G}^i = \frac{1}{2}\Delta u(x) + \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha)\frac{< \nabla u(x), \alpha >}{< \alpha, x >} + \sum_{\alpha \in R_+^i} k(\alpha)\frac{u(\sigma_\alpha(x)) - u(x)}{< \alpha, x >^2} \quad (u \in C^2(E)).$$

3) Si pour un $i = 1, \dots, m$, on a $\sigma_{\alpha_i}(R^{i-1}) = R^{i-1}$, alors Y^i peut s'écrire

$$Y_t^i = \sigma_{\alpha_i}^{M_t}(Y_t^{i-1})$$

où $M_t = N^i_{\int_0^t \frac{ds}{< Y_s^{i-1}, \alpha_i >^2}}$ avec N^i un processus de Poisson d'intensité $k(\alpha_i)$, indépendant de Y^{i-1}.

La décomposition résultant du théorème dépend de la façon dont on a numéroté les éléments de R_+. Différentes numérotations conduisent à des décompositions en skew-product différentes du processus de Dunkl. Notons également que les processus Y^i définis dans le théorème sont tels que $Y^i \in C_i$ où les ensembles C_i sont définis par récurrence de la manière suivante: $C_0 = C, C_{i+1} = C_i \cup \sigma_{\alpha_i}(C_i)$ et finalement $C_m = \mathbb{R}^d$. Signalons pour terminer que O. Chybiryakov a également obtenu une décomposition en skew-product du processus de Dunkl W-radial. On consultera([2]) pour les détails.

References

[1] P. Biane, P. Bougerol, and N. O'Connell, *Littlemann paths and Brownian paths.* To appear in Duke Math. Journal, 2005.

[2] O. Chybiryakov, *Skew-product representations of multidimensional Dunkl Markov processes.* Preprint, 2005.

[3] C. Dellacherie, B. Maisonneuve, and P.A. Meyer. *Probabilités et potentiel. Chapitres XVII à XXIV. Processus de Markov(fin). Compléments de calcul stochastique.* Hermann éditeur, Paris, 1992.

[4] C. Dellacherie and P.A. Meyer, *Probabilités et potentiel. Chapitres XII à XVI. Théorie du potentiel associée à une résolvante. Théorie des processus de Markov.* Hermann éditeur, Paris, 1987.

[5] J.F. van Diejen and L. Vinet. *Calogero-Sutherland-Moser Models. CRM Series in Mathematical Physics.* Springer-Verlag, 2000.

[6] C. Dunkl, Differential-differences operators associated to reflection groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* **311** (1), pp. 167–183, 1989.

[7] C. Dunkl, Hankel transforms associated to finite reflection groups. *Contemp. Math.*, **138**, pp. 123–138, 1992.

[8] C. Dunkl and Y. Xu, *Orthogonal Polynomials of Several Variables.* Cambridge University Press, 2001.

[9] W. Feller, *An introduction to Probability Theory and its applications.* Vol. 2, second edition. John Wiley & Sons, Inc. 1971.

[10] L. Gallardo and L. Godefroy, Un principe d'invariance relatif à un processus généralisant le mouvement brownien N-dimensionnel. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série I **338**, pp. 487–492, 2004.

[11] L. Gallardo and M. Yor, *Some remarkable properties of the Dunkl martingales.* To appear in Sem. Prob.XXXIX, in hommage to P.A. Meyer; Springer, 2005.

[12] L. Gallardo and M. Yor, *Some new examples of Markov processes which enjoy the time-inversion property.* PTRF. Vol. 132 no. 1, pp. 150–162, May 2005.

[13] L. Gallardo and M. Yor, *A chaotic representation property of the multidimensional Dunkl processes.* A paraître dans Annals of Probability.

[14] L. Godefroy, *Frontière de Martin sur les hypergroupes et principe d'invariance relative au processus de Dunkl.* Thèse, Université de Tours, December 2003.

[15] J.E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups.* Cambridge University Press. 1990.

[16] P.A. Meyer, *I*ntégrales stochastiques, I to IV. In: Lecture Notes in Math. 39, Séminaire de Probabilités I. Springer-Verlag, 1967.

[17] P.A. Meyer, *C*onstruction de solutions d'équations de structure. Séminaire de Probabilités XXIII. LNM 1372, pp. 142–145, Springer Verlag, 1989.

[18] D. Revuz and M. Yor, *C*ontinuous Martingales and Brownian Motion. Springer. Third Edition, corrected second printing, 2001.

[19] M. Rösler, Generalized Hermite Polynomials and the Heat Equation for Dunkl operators. *Comm. Math. Phys.* **192** (3), pp. 519–542, 1999.

[20] M. Rösler, *D*unkl Operators: Theory and Applications. (Lecture Notes for the OP-SF Euro Summer School 2002, Leuven, Belgium.) In: Orthogonal Polynomials and Special Functions; eds. E. Koelink, W. van Assche. Springer Lecture Notes in Math. 1817, pp. 93–136, 2003.

[21] M. Rösler and M. Voit, Markov processes related with Dunkl operators. *Adv. in App. Math.* **21** (4), pp. 575–643, 1998.

[22] K. Trimèche, The Dunkl intertwining operator on spaces of functions and distributions and integral representation of its dual. *Integ. Transf. and Special Funct.* **12** (4), pp. 349–374, 2002.

[23] S. Watanabe, On discontinuous additive functionals and Lévy measures of a Markov process. *Jap. J. Math.* **34**, pp. 53–79, 1964.

[24] M. Yor, *S*ome aspects of Brownian motion. Part II: Some recent martingale problems. ETH Zürich Lecture Notes in Math. Birkhäuser, 1997.